

المتباينات الخطية

Linear Inequalities

المتباينات الخطية بمتغيرين.

المتباينة الخطية بمتغيرين بيانياً.

المتباينة الخطية بمتغيرين.

المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً، وباستخدام الآلة الراسمة.

Linear Inequalities in Two Variables



إذا كان سعر الكيلو غرام الواحد من السكر ٤٥ قرشاً،
سعر الكيلو غرام الواحد من الأرز ٦٠ قرشاً، وأرادت شادن
شراء كمية من السكر، وكمية من الأرز، بحيث لا يزيد الثمن
الكلي على ١٠٠٠ دينار، عبّر عن ذلك بمتباينة خطية بمتغيرين،
وسمّ منطقة حلّها بيانياً.

يوجد كثير من المسائل، التي يمكن حلّها باستخدام المتباينات.
وتعرفت سابقاً المتباينات الخطية بمتغير واحد، وتمثيلها على خط الأعداد، وفي هذا
الدرس، ستعرف المتباينات الخطية بمتغيرين، وتمثيلها في المستوى الإحداثي.
المتباينة الخطية بمتغيرين هي المتباينة التي يمكن كتابتها على إحدى الصور الآتية:

$$ax + by > c$$

$$ax + by < c$$

$$ax + by \leq c$$

$$ax + by \geq c$$

حيث أ، ب، ج أعداد حقيقية، أ ≠ صفراً، ب ≠ صفراً.

تعريف

المتباينة الخطيئة بمتغيرين: تعبير جبري بمتغيرين، يحوي إشارة من إشارات التباين ($<$ ، $>$ ، \leq ، \geq)، وتعد النقطة (س، ص) حلاً للمتباينة إذا حققتها.

مثال (١-١١)

أي من النقاط الآتية: (١، ١)، (١، -١)، (٢، ١) تعد حلاً للمتباينة $٣ - ٢ \leq ٤$ ؟

الحل

نعوض قيمة س، وقيمة ص في المتباينة.

النقطة (١، ١)

$٣ - ١ \times ٢ - ١ \times ٣ \leq ٤$ ومنه $٣ - ٢ \leq ٤$ (العبارة ليست صحيحة)

إذن: النقطة (١، ١) ليست حلاً للمتباينة.

النقطة (١، -١)

$٣ - ١ \times ٢ - ١ \times ٣ \leq ٤$ ومنه $٣ + ٢ \leq ٤$ (العبارة صحيحة).

إذن النقطة (١، -١) حل للمتباينة.

النقطة (٢، ١)

$٣ - ٢ \times ٢ - ١ \times ٣ \leq ٤$ ومنه $٣ - ٤ \leq ٤$ (العبارة صحيحة).

إذن النقطة (٢، ١) حل للمتباينة.

فكر

هل يوجد نقاط أخرى تعد حلاً للمتباينة في المثال (١-١١)؟

تدريب ١-١٥

أي من النقاط (١، -٢)، (١، ٣) حل للمتباينة في المثال (١-١١)؟

خط المتباينة $3س - ص \leq 1$ بيانياً

ات المتباين

خط المتباينة $3س - ص \leq 1$ بيانياً نتبع الخطوات الآتية:
 المتباينة إلى معادلة، فنحصل على $3س - ص = 1$ ، وهي المعادلة المناظرة لها.
 نكتب المعادلة $3س - ص = 1$ بيانياً.

نضع ص موضوع القانون: $3س - 1 = ص$
 تكون جدولاً

س	٠	٢
ص	١-	٥
(س، ص)	(٠، ١-)	(٢، ٥)

جـ) نرسم النقاط على المستوى الإحداثي، ونصل بينها بخط مستقيم متصل.
 نأخذ نقطة اختبار لا تقع على الخط المستقيم الممثل
 بيانياً، ولتكن (٠، ٠) ونعوضها في المتباينة:

$$3س - ص \leq 1$$

$$3 \times 0 - 0 \leq 1$$

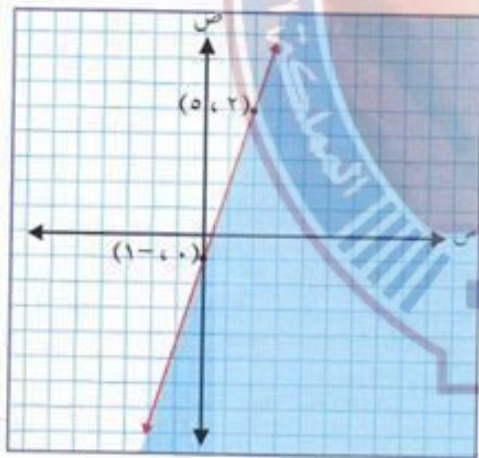
وهي $0 \leq 1$ (عبارة ليست صحيحة)

إذن: (٠، ٠) ليست حلاً للمتباينة.

د) حدد منطقة الحل، وفي هذه الحالة تكون النقطة

(٠، ٠) ليست واقعة في منطقة الحل، فتكون منطقة

الحل هي المنطقة المظللة في الشكل (١-٥).



الشكل (١-٥)



إذا كانت المتباينة المطلوب تمثيلها، تحتوي إحدى الإشارتين \geq ، فإن نقاط الخط الفاصل ضمن الحل، ويرسم الخط متصلًا .

أما إذا كانت المتباينة المطلوب تمثيلها تحتوي إحدى الإشارتين $<$ ، $>$ فإن نقاط الخط الفاصل ليست ضمن الحل ، ويرسم الخط متقطعًا .-----

تدريب ١٦-١

حل المتباينة $4x + 2 < 6$ بيانيًا.

تدريب ١٧-١

حل المسألة الواردة بداية الدرس.



١٠ أي العبارات الآتية تمثل متباينة خطية بمتغيرين؟

أ) $ص = ٣س + ٥$

ب) $ص - س + ١ \leq ٠$

ج) $٣س + ص > ٢$

د) $س < ٣ - ٢ص$

هـ) $س + ٤ < ٨$

١١ أي النقاط الآتية: $(١, ٢)$ ، $(٠, ٤)$ ، $(١, -١)$ ، $(١, ١)$ تعدّ حلًا للمتباينة $س - ص + ١ < ٠$ ؟

١٢ تقول نادية إن $(٣, -١)$ هو حل للمتباينة $٣س - ٢ص > صفر$ ، ناقش مقولتها.

١٣ حلّ كلّاً من المتباينات الآتية بيانياً:

أ) $٢س - ص < ١$

ب) $س + ٢ص \geq ٣$

ج) $ص < ٥س + ١٠$

١٤ يحتاج مطعم شراء ما لا يزيد على ٣٠ كيلو غرام من البطاطا يومياً، حيث يتوافر بالأسواق

أكياس بطاطا ذات الكتلة ٣ كيلو غرام، ٥ كيلو غرام. اكتب متباينة تعبّر عن عدد الأكياس التي

يستطيع المطعم شراءها من كلّ كتلة، ثمّ حلّها بيانياً.

حل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً

Graphical Solving of Linear Inequalities with Two Variables

ثانياً



مصنّع للمواد الغذائية، ينتج ما لا يقل عن ٣٠٠
علبة يومياً من علب الفول والحمص، تكلفة علبة الفول
١٥ قرشاً، وعلبة الحمص ١٠ قروش، إذا وضع المصنّع
٦٠ ديناراً على الأكثر تكلفةً يومية إجمالية، فجدّد
العلب التي يمكن إنتاجها يومياً من الفول والحمص؟

نلاحظ أنّه توجد إجابات متعددة لهذه المسألة، ولمعرفة الإجابات المعقولة، نبدأ بترجمة
المسألة عن طريق تحويل المتغيرات إلى رموز، والمعلومات إلى متباينات، على النحو الآتي:
نفرض أنّ: $s =$ عدد علب الفول المنتجة يومياً.

$v =$ عدد علب الحمص المنتجة يومياً.

عدد العلب المنتجة يومياً، لا يقل عن ٣٠٠ علبة: $s + v \geq 300$

تكلفة الإنتاج اليومية لا تزيد على ٦٠٠٠ قرش: $15s + 10v \leq 6000$

وفي هذه المسألة يجب أن تكون المتغيرات غير سالبة، ويمكنك التعبير عن ذلك بالمتباينات
 $s \geq 0, v \geq 0$

ليصبح لدينا أربع متباينات خطية، والمطلوب حل مشترك لهذه المتباينات من خلال إيجاد قيم
المتغيرات، ومثل هذه المتباينات التي لها حل مشترك تُسمى **نظاماً من المتباينات الخطية بمتغيرين**

مثال (١-١٣)

في النظام $s \leq 2, v - 1, s - 3 < -4$ ، أي النقاط الآتية تنتمي لمجموعة حل النظام:
 $(0, -1), (-4, 3)$ ؟

لكن تكون النقطة (م، ن) حلاً لهذا النظام يجب أن تحقق المتباينتين معاً، النقطة (٠، ١) هي

حل لهذا النظام لأنها تحقق المتباينتين معاً

عبارة صحيحة $1 - 1 \leq 0 \times 3$

وكذلك $1 - 1 < 0 \times 3$ عبارة صحيحة

لكن النقطة (٣، ٤) ليست حلاً لأنها لا تحقق المتباينتين معاً

عبارة غير صحيحة $1 - 3 \leq 4 \times 3$

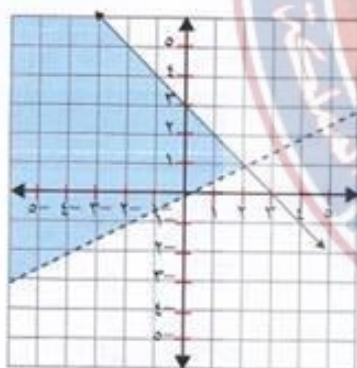
لكن $4 - 3 < 4 \times 3$ عبارة صحيحة

تدريب ١٨-١

كتب نقطتين تحققان النظام السابق، ونقطتين لا تحققانه.

حل ١٨-١

حل منطقة حل النظام الآتي بيانياً: $س + ص \geq 3$ ، $س - ٢ ص > ٠$



الشكل (٦-١)

ظل منطقة حل كل من المتباينة $س + ص \geq 3$ ، والمتباينة

$س - ٢ ص > ٠$

كلاً على حدة وعلى مستوى إحداثي واحد، وتمثل منطقة حل

النظام بجميع النقاط في منطقة الحل المشترك (المنطقة المظللة

باللون الأزرق) كما في الشكل (٦-١).

تدريب ١٩-١

حل منطقة حل النظام الآتي بيانياً:

$٣ - ٢ ص < ١$

$٣ + ٢ ص > ٤$

$س < ٠$

$ص < ٠$

نبدأ بترجمة
النحو الآتي:

ذلك بالمتباينتين

خلال إيجاد قيم

الخطية بمتغيرين.

عنه حل النظام:

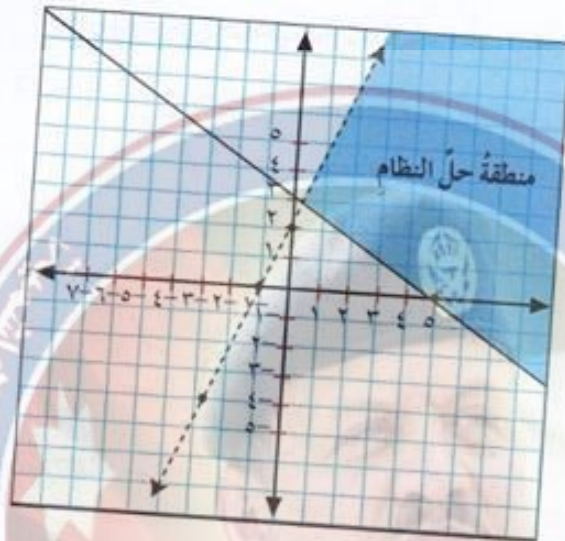
مثال (١-١٥)

مثل منطقة حل النظام الآتي ، باستخدام تطبيق الآلة الراسمة.

$$3س + 5ص \leq 15$$

$$ص - 2س > 0$$

الحل



تدريب (١-١٦)

مثل منطقة حل النظام الآتي ، باستخدام الآلة الراسمة

$$3س + 5ص \leq 15$$

$$ص - 2س > 0$$

$$7س + 5ص \geq 35$$

تدريب (١-٢١)

حل المسألة الواردة بداية الدرس.

الأسئلة ؟

٢١) تبيّن النقاط الآتية (٢، ٤)، (١، ٥)، (٢، ١)، (٢، ١)، تُعدّ حلولاً لنظام المعادلات الآتي:

$$٢س - ٣ص > ١$$

$$٣س + ٥ص < ٥$$

٢٢) مثل منطقة حلّ كلّ من الأنظمة الآتية بيانياً:

$$٢س + ٢ص \leq ٢$$

$$٤ < ٢ص + ٤س$$

$$٦ > ٢س + ٢ص$$

$$١٠ \geq ٥س + ٥ص$$

$$٢ \leq ٢س + ٢ص$$

٢٣) استخدم الآلة الراسمة في حلّ كلّ من النظامين الآتين:

$$٣ > ٢س - ٣ص$$

$$١ \leq ١س - ١ص$$

$$١ + ١ص < ٣س$$

$$٣س - ٢٦ < ٣ص$$

٢٤) مخيمٌ كشفى يتكوّن من ٤٠ طالباً، طُلب من قائد المخيم شراء علب عصير، وقطع من البسكويت، فإذا كان ثمن علبة العصير ٢٠ قرشاً، وقطعة البسكويت ٣٠ قرشاً، ولديه ٢٤ ديناراً، وأراد شراء كمية كافية، بحيث يحصل كلّ طالب على علبة عصير، وقطعة بسكويت على الأقل. اكتب نظاماً من المتباينات الخطية، يبيّن البدائل المختلفة لشراء علب العصير، وقطع البسكويت، مع العلم أنّه ليس من الضروري صرف المبلغ كاملاً.

أُسئلة الوحدة

(١) اكتب كثير الحدود الآتي بالصورة القياسية، وحدد درجته ومعاملاته:

$$ق(س) = ٤س^٢ - ٤ + ٦س + ١٠س^٤ - ٩س^٥ + ٣س^٢ - س$$

(٢) يمكن التعبير عن ثلاثة أعداد صحيحة متتالية بالرموز:

س، س + ١، س + ٢، اكتب الاقتراح الذي يمثل مجموع هذه الأعداد؟

(٣) مثل كلاً من الاقتراحات كثيرات الحدود الآتية باستخدام برمجية إكسل (Excel)

أ) $ق(س) = س$

ب) $م(س) = س^٣ + ٤س^٢ - ٥$

٤) إذا كان $ق(س) = س^٣ + ٢س^٢ - ٤$ ، $هـ(س) = س^٢ - س$ ، $م(س) = س + ٧$ جد كلاً ممّا

يأتي:

أ) $(ق + هـ)(س)$

ب) $(ق ÷ هـ)(س)$

ج) $(هـ + ق - م)(س)$

د) $(هـ \cdot ق)(س)$

٥) إذا كان باقي قسمة $ق(س)$ على $(٢س^٢ - ١)$ يساوي $(٥س^٣ + ٣س - ٧)$ ، وكان خارج

القسمة يساوي $(٤س^٢ + ٥)$ ، جد قاعدة كثير الحدود $ق(س)$.

٦) اكتب متباينة خطية بمتغيرين، واكتب ثلاثة حلول لها.

٧) يبيع محل تجاري نوعين من المعاطف: رجاليًا، وولاديًا. فإذا كان سعر المعطف الرجالي ٢٠ دينارًا، وسعر المعطف الولادي ١٠ دنانير، ولم تزد مبيعات هذا المحل من المعاطف على ١٨٠ دينارًا في أحد الأيام. اكتب المتباينة التي تبين عدد المعاطف المباعة المحتمل من النوعين في ذلك اليوم، ثم مثلها بيانيًا.

استخدم الآلة الراسمة في حل كل من النظامين الآتيين:

(ب) $ص \leq ٤ - ٤$

$ص > ٣ + ٣$

$ص \leq ٣ - ٣ + ٣$

$٦ < ٣ - ٣ + ٢ ص$

$٨ < ٤ - ٣ ص$

تحتوي الاقترانات الآتية كثير حدود، ثم حدّد درجته:

(ب) $٣ = (س)$

(د) $٨ - ٣ = (س) + ٥ - ٨$

(هـ) $٥ - ٤ = (س)$

(ج) $٦ + ١ = (س)$

٧ جدّد كلّاً من محيط مربع طول ضلعيه يُعطى بالاقتران $ل(س) = ٦ + ٣ س - ٢$

$٩ - ٨ س = (س) - ٤ س - ٣ س$ ، هـ

كقاعدة الاقتران كثير الحدود ك، الذي يمثل ناتج جمع الاقترانين ق ، هـ ، وقاعدة الاقتران ل الذي يمثل حاصل ضرب الاقترانين ق ، هـ .

جدّد خارج قسمة $ق(س) = ٣ س - ٢ س + ١$ على $هـ(س) = ٣ س - ٢$ ، وباقيها.

هل $(٤ - ، ٢ -)$ تقع في منطقة حل المتباينة $٤ س \leq ٥$

مثل منطقة حل كل من المتباينات الآتية بيانياً:

(أ) $٢ < س$

(ب) $٢ \leq ٢ + ٢$

المعطف الرجالي
حل من المعطف
مبيعة المحتمل من